Codes correcteur d’erreur

Une Introduction

Les transmissions et le stockage ne sont pas sûrs à 100%

Le bruit :
poussière, électromagnétisme, chaleur, qualité des supports…

Idée :
Rajouter de la redondance à l'information
pour **détecter/corriger** des erreurs

Détection : Ethernet, …
Correction : stockage de données,
communications interplanétaires,…

Comment rajouter cette redondance ??

Applications des codes correcteurs

l'émergence des calculs, stockages et transmissions numériques
a donné aux codes correcteurs d'erreurs une grande importance

Beaucoup d'ordinateurs ont la capacité de corriger des erreurs.

C'est moins cher de corriger des erreurs éventuelles plutôt
que de construire des ordinateurs garantis sans erreurs

Les codes utilisés sont souvent des codes de **Hamming** pouvant
corriger une erreur

Stockage de hautes capacités

On utilise aussi des codes pour stocker des données (sons, vidéo,…)
car lorsque la densité d'information sur le disque augmente, le risque
d'erreur augmente aussi.

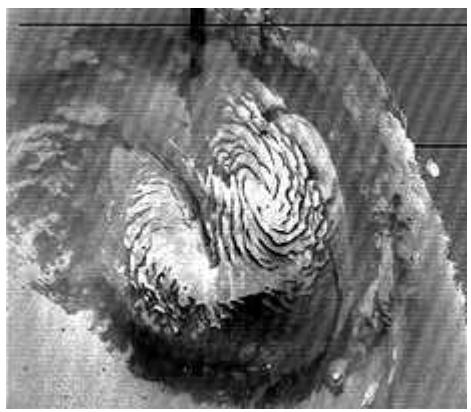
1972 : la sonde Mariner transmet des images de Mars.

Le canal est l'espace et l'atmosphère terrestre.

Le bruit vient de l'activité solaire et des conditions atmosphériques

Le codage :

64 dégradés de gris codés sur 6 bits
l'encodage produit des mots de 32 bits
le code de Reed et Muller est utilisé



1979 : La sonde Voyager transmet des images couleurs de Jupiter

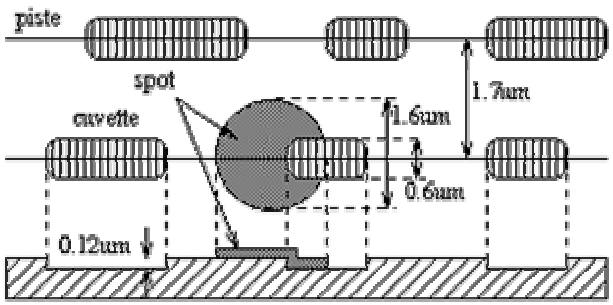
4096 différents dégradés de couleurs
12 bits d'information
Les mots sont de longueur 24 bits
Le code utilisé : Le code de **Golay**
Il permet de corriger 3 erreurs et détecter 7 erreurs

Audio numérique

L'information est stockée sur un film aluminium
Des trous microscopiques représentent des 0 et des 1
Un faisceau laser permet de lire l'info
Exemple : les lecteurs CD de Philips et Sony utilisent des codes de **Reed-Solomon** entrelacés

Le disque laser :

La lecture se fait à l'aide d'un spot laser



Actuellement,
toutes les communications sans fil
utilisent des codes correcteurs d'erreurs

Concepts fondamentaux

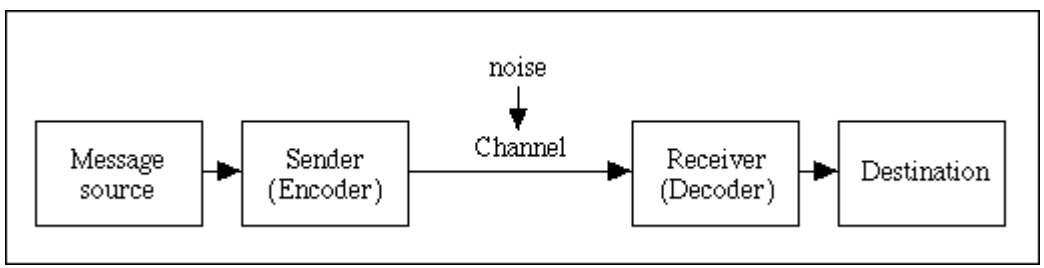
Choisir un alphabet A de q symboles
Exemples : A = {a,b,c,...,z}, A = {0,1} alphabet binaire.

Definition **Un code en block de longueur n contenant M mots Sur l'alphabet A est un ensemble de M n-tuples**

Ce code est appelé un (n,M)-code sur A.

En pratique, c'est souvent l'alphabet binaire qui est utilisé.

Remarque :
Le mot reçu par le récepteur n'est pas toujours le mot envoyé



Exemple 1

L'information à transmettre est un des symboles {N, E, O, S}. Pour des raisons pratiques on revient au binaire :

N -> 00
E -> 01
O -> 10
S -> 11

On rajoute ensuite de la redondance

Et on construit un (5,4) code

N -> 00 000
E -> 01 110
O -> 10 011
S -> 11 101

N ->	00 000
E ->	01 110
O ->	10 011
S ->	11 101

Les mots de codes sont de longueur 5 et il existe 4 mots différents

L'**information** est codée sur k=2 bits
La **redondance** r est de 3 bits pour obtenir des mots de longueur n=5

Définition : la valeur R=k/n est appelée le taux du code

Dans notre exemple R=2/5

Définition: La **distance de Hamming** d(x,y) entre deux mots x et y est le nombre de positions de coordonnées qui diffèrent entre x et y

Exemple : A = {0,1}, x=(10110) y=(11O11) d(x,y) =3.

Le **poids** de x, w(x), est le nombre de coordonnées non nulles dans x

Exemple1 x=(10110) w(x)=3

Exemple2 : Soit C= {c0= 00000, c1= 01110, c2= 10011, c3= 11101 }
Le poids des mots est respectivement 0, 3, 3 et 4

d(c1, c2) = 4
d(c1, c3) = 3
d(c2, c3) = 3

Donc la distance la plus petite entre deux mot du code est 3

Exemple dans un autre alphabet :

A = (0,1,2), u = (21002) v=(12001) ; d(u,v) =3.

Définition : Soit C un (n,M) code, la distance de Hamming du code est

$d = \min \{d(x,y): x,y \text{ appartenant à } C, x \neq y\}$.

C'est la distance minimale entre deux mots distincts du code

Exemple

C = {c0,c1,c2,c3}

avec c0=(000000) c1 =(101101) c2= (011110) c3= (111010)

Calculer la distance de Hamming d du code C

Remarque : si le nombre de mots est grand,
d est difficile à calculer

Soit un (n,M) code de distance d
Soit y le mot reçu. Comment décoder??

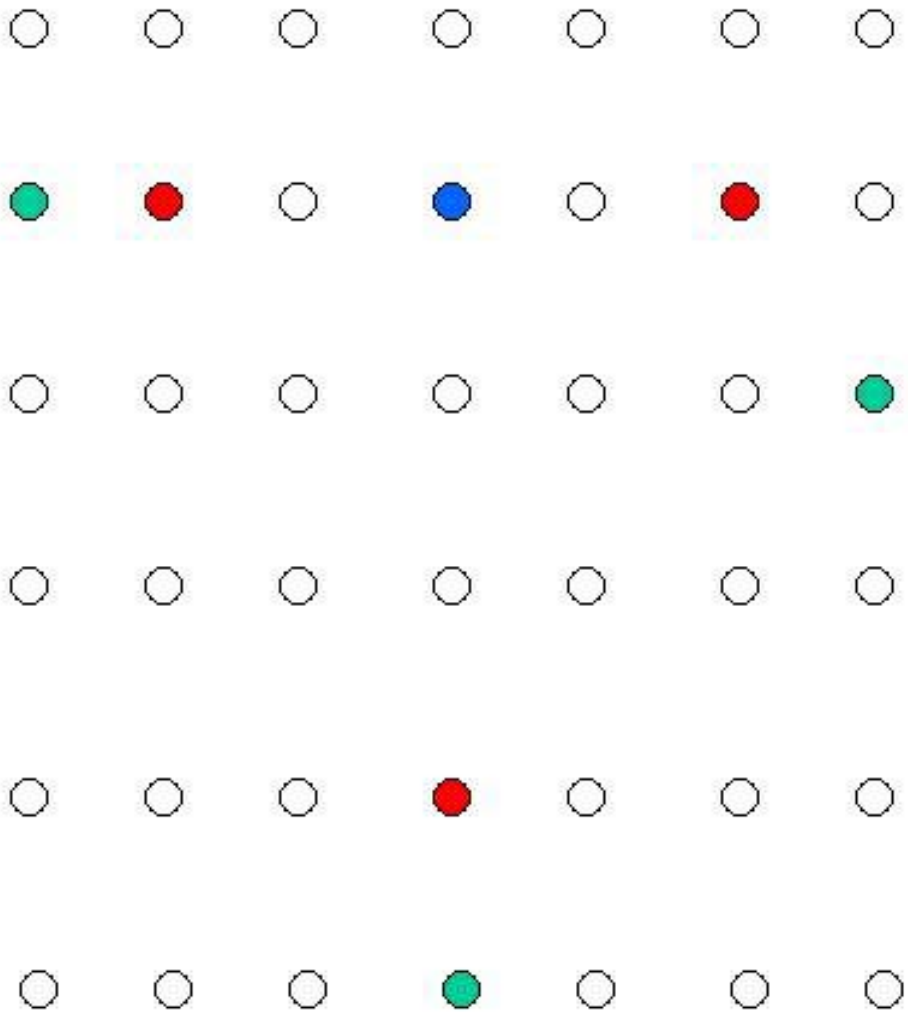
Trois cas possibles

Zéro erreur : **y est un mot du code**
Quelques erreurs : **corriger y en un mot du code**
Quelques erreurs : **correction impossible**

Le décodeur peut se tromper
Il peut choisir un mot de code à la place d'un autre
Il choisit le mot qui a la probabilité la plus grande d'être correcte

On suppose que
La probabilité qu'une coordonnée soit erronée est indépendante de sa position dans le mot

La stratégie adoptée est : **correction au plus proche voisin**



Mots du code

Mots recus

Mot non corrigeable

Théorème : Un code de paramètres (n,M,2e+1)
peut corriger e erreurs
peut aussi détecter 2e erreurs

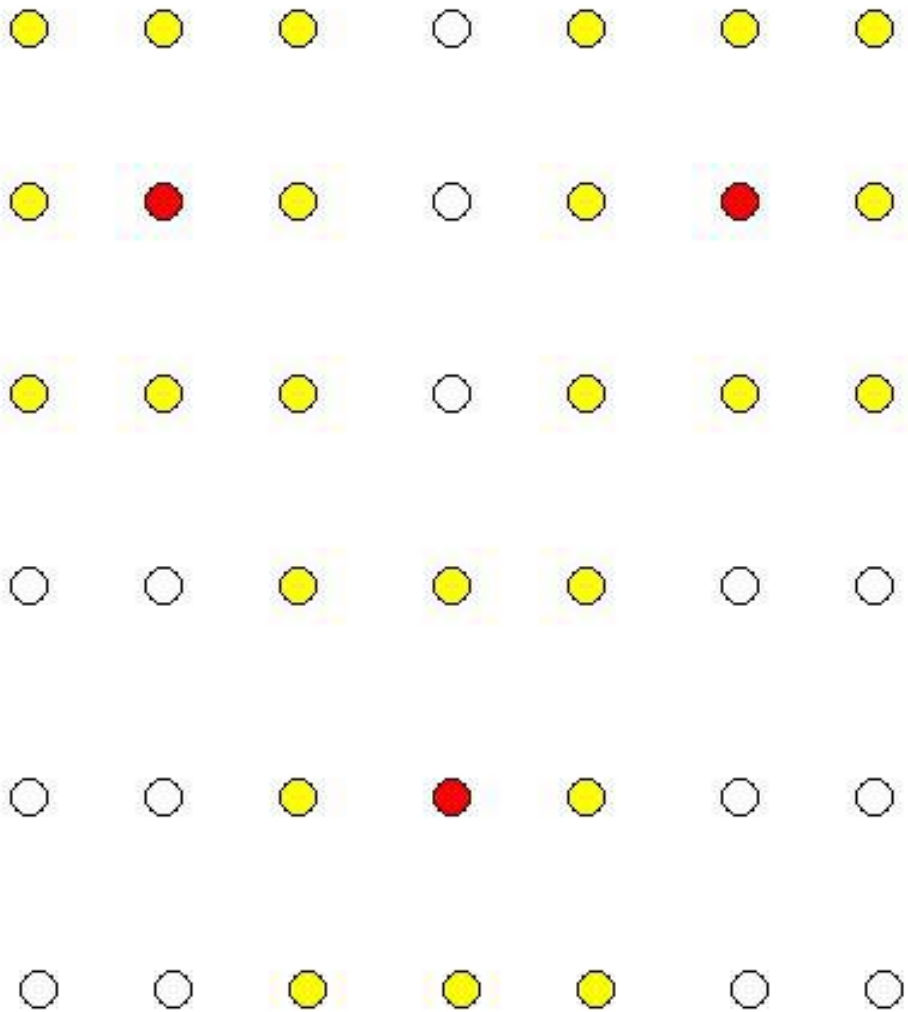
Soit S l'ensemble de tous les vecteurs de longueur n sur A

S(c) = {x appartenant à S: d(x,c) <= e).

S(c) est la boule de centre c et de rayon e

Pour pouvoir corriger e erreurs, il faut que les boules ne s'intersectent pas

Si le mot reçu n'appartient pas à une boule il ne peut pas être corrigé



Définition

Si les boules sont disjointes et recouvre l'espace, le code est dit parfait

Tous les mots peuvent alors être corrigés

Problèmes :

1.Comment trouver des codes parfaits?

2. n,M donnés
Trouver des codes dont la distance d est optimale?

3. n et d donnés
Trouver des codes qui ont le plus de mots possibles?

Remarque : Trouver la distance d'un code peut prendre plusieurs siècles lorsque le code est grand et n'admet aucune structure.

Dans la pratique, on utilise des **codes linéaires** ce qui permet d'utiliser les outils de l'algèbre linéaire

Parmi les codes linéaires, les codes cycliques représentent la famille la plus intéressante et la plus utilisée :

Hamming, BCH, RS, Kerdock, RQ, …

Les codes linéaires

- Soit le code

C = {00000000, 11110000, 00001111, 11111111}

On peut le représenter par une matrice

$$G = \begin{pmatrix} 11110000 \\ 00001111 \end{pmatrix}$$ appelée **matrice génératrice**

Le code est un sous espace vectoriel de F_2^8 de dimension k=2

C'est un code linéaire de paramètres [n=8, k=2, d=4]

Remarque : pour calculer la distance minimale de C, il suffit de calculer le poids des mots et de prendre le plus petit non nul.

- Soit u un message de longueur k à coder et G une matrice génératrice du code C de longueur n

Le mot de code est c = uG

Exemple précédent, et u = (11), on obtient

C = uG = (11111111)

On vérifie que c est un mot du code C

Deux matrices génératrices qui se déduisent l'une de l'autre par permutation de colonnes donnent des codes équivalents

- Tout code linéaire est équivalent à un code C possédant un codage systématique, pour lequel

$$G = \left(I_K, P \right)$$

Exemple : le code de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 10111000 \\ 01000111 \end{pmatrix}$$

Est équivalent au code de l'exemple précédent

Il a les mêmes propriétés

- Après un codage systématique, les k premiers symboles du mot de code sont les symboles d'information et les n-k restants sont les symboles de contrôle.
- Les mots sont donc de la forme

- $(c0, c1, \ldots, ck-1, ck, \ldots, cn-1)$

u= message redondance

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $x.y = 0$

- Le code dual de C est l'ensemble de vecteur de F^n dont le produit scalaire avec un mot du code est nul.
- La dimension du code dual est n-k
- Le dual du dual de C est C
- Soit H = $\left(-P^T, I_{n-k} \right)$ alors $GH^T = 0$

- Tous les vecteurs engendrés par H sont duaux des mots de C. Donc si x est un mot de C alors $xH^T=0$
- H est appelée matrice de contrôle de C

- c est dans C **SSI** $cH^T=0$

C'est un test pour vérifier que un mot appartient au code.

- Soit y un mot reçu. Le syndrome est

  $s(y) = yH^T$

  $y = c+e$ (e étant l'erreur éventuelle)

or par linéarité

$yH^T = (c+e)H^T = cH^T+eH^T = eH^T$

Le syndrome ne dépend que de l'erreur !

Comment utiliser le syndrome pour décoder?

Le code de Hamming H7, définit par sa matrice de contrôle H, dont toutes les colonnes sont distinctes

$$H = \begin{pmatrix} 0001111 \\ 0110011 \\ 1010101 \end{pmatrix}$$

soit y = (1011000)

y appartient-il à H7?

$s = yH^T = (110)$, l'erreur est donc à la sixième position : c = (1011010)

- La distance minimale d'un code de Hamming est 3

Soit $H=(h_1,\ldots,h_n)$ et soit $y = c+e$

$$S(y) = eH^T$$

Si l'erreur est de poids 1, e n'a qu'une composante non nulle en position i : e = (0000..1..000)

Le syndrome vaut $\mathbf{eH^T = h_i^T}$

Les colonnes h_i étant toutes différentes, on peut localiser l'erreur

$$(00..1..00) \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ h_i \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix} = h_i$$

Si l'erreur est de poids supérieur à 1, le code ne permet pas la correction. Par exemple, si il y a deux erreurs en position i et j, on a

$$eH^T = h_i^T + h_j^T$$

Or $h_i + h_j$ est nécessairement égal à une autre colonne de H.

Il existe donc un mot de code à distance 1 du mot reçu

La distance minimale est donc au moins 3

Dans H7, il existe des mots de poids 3

Par exemple (1000101) exercice : en trouver d'autres

Donc **d(H7)=3**

- Plus généralement, les codes de Hamming ont une distance minimale égale à trois
- Ils peuvent corriger une erreur
- Il existe des codes qui permettent de corriger plus d'une erreur :
  - Reed et Muller
  - Codes de Résidus Quadratiques
  - Codes BCH
  - Codes de Reed-Solomon
  - Codes de Goppa
- Beaucoup de ces codes sont cycliques ou cycliques étendus